ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1985

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

Dans tout ce problème on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble constitué des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul.
On confondra si nécessaire polynôme réel et fonction polynôme.
Soit l'équation différentielle :

(E) $\quad xy'' + (h-x)y' + \lambda y = 0,$

où λ et h sont des paramètres réels. On suppose dans tout le problème que $h > 0$; n désigne, sauf indication contraire, un élément de $\mathbb{N}^*$.

1.a. Trouver la valeur de λ (on la notera λ_n dans la suite de l'énoncé) telle que (E) comporte parmi ses solutions un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$). On notera alors P_n le polynôme solution de (E) dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut $\frac{(-1)^n}{n!}$. On convient de plus que $P_0 = 1$.

b. Calculer les coefficients des trois termes de plus haut degré de P_n ($n \geq 2$).

2. On pose $f_h(x) = e^{-x}.x^{h-1}$. Montrer que si y est solution de E sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors :
$(x\, f_h(x)\, y')' + \lambda\, f_h(x)\, y = 0$

3. On note, pour P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$,

$$\Phi_h(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\, f_h(x)\, dx.$$

a. Justifier l'existence de Φ_h.

b. Montrer que Φ_h satisfait aux propriétés suivantes, pour tous R, R_1, R_2, Q, Q_1, Q_2 appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et tous λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 appartenant à $\mathbb{R}$:

. $\Phi_h(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2, Q) = \lambda_1 \Phi_h(R_1, Q) + \lambda_2 \Phi_h(R_2, Q)$

. $\Phi_h(R, \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2) = \mu_1 \Phi_h(R, Q_1) + \mu_2 \Phi_h(R, Q_2)$

. $\Phi_h(R, Q) = \Phi_h(Q, R)$

. $\Phi_h(R, R) \geq 0$

. $\Phi_h(R, R) = 0 \Longrightarrow R = 0$

c. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\lambda_n \Phi_h(P_m, P_n) = \Phi_{h+1}(P'_m, P'_n)$.

d. En déduire que pour $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, on a :
$\Phi_h(P_m, P_n) = 0$

4.a. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b. En déduire qu'il existe des réels $\alpha_{n,0}, \ldots, \alpha_{n,n+1}$ tels que
$XP_n = \alpha_{n,0} P_0 + \ldots + \alpha_{n,n+1} P_{n+1}$.

c. Montrer que si Q est un polynôme de degré strictement inférieur à n, alors
$\Phi_h(P_n, Q) = 0$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

d. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n-2$, on a : $\alpha_{n,p} = 0$

e. Calculer $\alpha_{n,n-1}$, $\alpha_{n,n}$, $\alpha_{n,n+1}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

5.a. Montrer que :

$$\alpha_{n,n+1} \int_0^{+\infty} f_h(x)(P_{n+1}(x))^2\, dx = \alpha_{n+1,n} \int_0^{+\infty} f_h(x)(P_n(x))^2\, dx$$

b. Pour $h \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Phi_h(P_n, P_n)$